

文章编号 1004-924X(2007)06-0878-06

# 基于状态观测器的球形机器人状态反馈控制系统设计

岳明, 邓宗全

(哈尔滨工业大学 宇航空间机构及控制研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 基于能量耗散形式下的拉格朗日方程, 建立了基于状态观测器的球形机器人的动力学方程, 得出这是一个非线性的仿射系统。根据机器人的实际运动情况和理论仿真曲线对方程进行了线性化处理和仿射变换, 在新建立的平衡点处应用线性理论进行控制系统的设计。考虑到某些状态变量的不可测量性, 构建了状态观测器对系统的全维状态进行实时观测, 在此基础上设计了系统的状态反馈控制器。仿真结果表明了所设计控制器的有效性。

**关键词:** 球形机器人; 能量耗散; 仿射变换; 状态观测器; 反馈控制器

**中图分类号:** TP242.6 **文献标识码:** A

## Design of state feedback control system for spherical robot based on state observer

YUE Ming, DENG Zong-quan

(Research Center of Aerospace Mechanism and Control,  
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The dynamic equation of a spherical robot was established, and a nonlinear affine system is derived based on energy dissipation Lagrangian equation. Linearization and affine transformation methods are used in the new equilibrium point to design control system by a powerful linear theory, according to the actual movements and theoretical simulated datum of robot. A state observer is built for estimating full state variables of system in real-time because some of state variables are immeasurability. The state feedback controller is designed and the simulation results prove the validity of the controller.

**Key words:** spherical robot; energy dissipation; affine transformation; state observer; feedback controller

## 1 引言

球形机器人从上个世纪九十年代出现以来, 迅速得到了各国机器人研究人员的广泛关注。这

主要是由于它采用独特的运动方式, 较之以往的移动机器人具有转向灵活、所受滚动阻力小等诸多优点<sup>[1-3]</sup>。

球形机器人一般具有转向和前向滚动两种主要的运动方式。哈尔滨工业大学设计的球形机器

收稿日期: 2006-10-25; 修订日期: 2007-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金助项目(No. 50375032); 高等学校学科创新引智计划(111计划)项目(No. B07018)

人将转向和前向滚动分时进行、完全解耦, 避免了非完整约束对力学系统的影响, 大大简化了控制系统设计上的难度。转向是由转向电机带动齿轮在环形齿条上滚动, 当电机输出模式为定转数时, 可以通过控制转向电机工作时间来调整机器人内部构件的转动角度, 这一步骤是机器人滚动方向的调整, 易于实现。而前向滚动相对较为复杂, 较之其它移动机器人不同, 是机器人完成工作任务的主要运动方式。本文主要针对球形机器人在前向滚动状态下迅速形成这样一个稳定平台, 执行观测任务展开分析研究。

## 2 机器人系统建模与分析

### 2.1 球形机器人结构简介

球形机器人内部的所有构件都密闭于球壳之中, 利用球体内部构件的重心偏离球心产生的偏心力矩进行驱动(结构如图 1 所示)。这种驱动方式与轮式机器人相比, 缺乏一个相对稳定的基座。驱动电机的输出转矩作用于执行器的同时, 对球壳也产生大小相等、方向相反的力矩, 整个机器人本体全部处于滚动之中。这样的运动方式为系统内部电子元器件的正常工作带来不便, 例如当机器人执行观测任务时, 无法保证视觉传感器向上位机传输稳定的图像。在对球形机器人进行前向滚动的实验研究中发现(如图 2 所示), 如果将视觉传感器安装在内部的执行器(充当配重的蓄电池)上, 通过设计适当的控制器, 将机器人的执行器的位置相对于垂直方向迅速镇定, 则能够使机器人出现一个相对稳定的平台, 帮助机器人采集到稳定的观测图像。

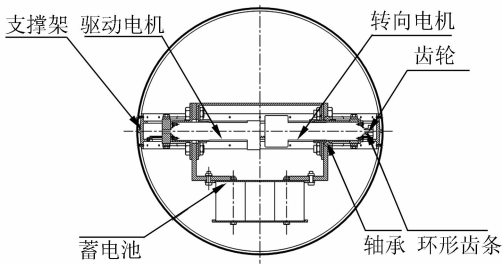


图 1 球形机器人结构图

Fig. 1 Structure of spherical robot

### 2.2 机器人系统动力学模型

球形机器人的前向滚动, 类似于一个二维平



图 2 前向滚动状态下的球形机器人  
Fig. 2 Spherical robot on rolling ahead

面内滚动的圆盘。在进行理论分析之前, 可以将机器人所有构件通过等效代换的形式转化为两部分: 匀质薄壁球壳  $M$  和内部集中质点  $m$ , 两者之间通过长度为  $L$  的无质连杆在球心处铰接。假想电机作用于转动副处, 电机定子、转子分别与球壳、连杆固联, 这样, 当电机启动后, 便在球壳与质点  $m$  之间形成一个输入力矩  $\tau$ 。这是一个两自由度系统, 选取单摆相对于垂直方向的摆角  $\theta$  和球体滚过的角度  $\varphi$  作为描述系统的两个广义坐标。在地面上建立坐标系  $xOy$ , 设球体从  $O$  点出发, 某时刻球体与地面的接触点  $P$ , 则机器人在运动中的受力及其正方向如图 3 所示。

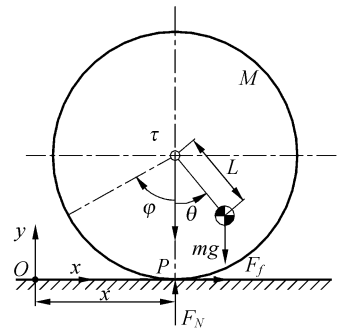


图 3 球形机器人滚动受力图

Fig. 3 Force diagram of spherical robot

假设  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$  分别是由质点系的平移、转动和向心力引起的动能,  $V$  为内部质点  $m$  的势能, 则系统的拉格朗日函数为:

$$L = T - V = T_1 + T_2 + T_3 - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{\varphi}^2 R^2 + \frac{1}{2}I_s\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_m\dot{\theta}^2 + mRL\dot{\varphi}\cos\theta - mg(R - L\cos\theta), \quad (1)$$

其中:

$$I_s = \frac{2}{3}MR^2 \text{——球壳关于球心的转动惯量}$$

$I_m = mL^2$ ——偏心质量关于球心的转动惯量

在实际工作中由于电机与轴承间存在着粘性阻尼,所以引入瑞利耗散函数  $\psi_q^{[4]}$ , 定义为:

$$\psi_q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \xi_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \xi (\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2, \quad (2)$$

其中:

$\xi$ —粘性摩擦系数

当球体在地面上作纯滚动时,地面的摩擦力  $F_f$  主要表现为库仑摩擦力,方向与球体的滚动角

$$\begin{bmatrix} I_m & b \cos \theta \\ b \cos \theta & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & -\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \sin \theta \\ d \cdot \text{sgn}(\dot{\varphi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中:

$\mu$ —地面的滚动摩擦

$a = (M+m)R^2 + I_s; b = mRL; c = mgL;$

$d = \mu(M+m)gR.$

从系统的动力学方程(6)可以看出,这是一个非定长、耦合的非线性系统,以此方程为基础进行控制系统的设计具有很大的难度。

### 2.3 动力学方程线性化

对于推导出的动力学方程(6),结合哈尔滨工业大学研制的球形机器人的实物模型,给定各参数如下: $M = 3 \text{ kg}, m = 5 \text{ kg}, R = 0.175 \text{ m}, L = 0.094 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, \tau = 1 \text{ Nm}, \xi = 0.03, \mu = 0.03.$ 选取系统的状态变量  $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \varphi \ \dot{\varphi}]^T$ , 当初态  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  时,应用龙格-库塔法得到系统的各状态变量在  $t = 10 \text{ s}$  内的变化曲线如图 4 所示。

根据单摆摆角的角度(图 4(a))和角速度值(图 4(b)),可以推算动力学方程(6)的阻尼阵中,  $\max |b\dot{\theta} \sin \theta| \approx 0.3\xi$ , 且呈指数衰减为零,所以这个由偏心力引起的附加项对于系统的影响并不大,可以忽略不计。符号函数  $\text{sgn}(\dot{\varphi})$  是引入的一个典型的非线性环节,在对球体运动实际和图 4(d)的仿真分析后可以判断,球体向前滚动角速度

速度  $\dot{\varphi}$  方向相反,由虚功定理得到广义力:

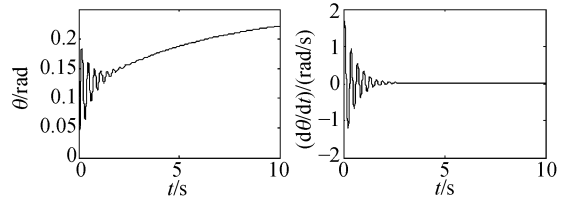
$$Q_\theta = \tau - mgL \sin \theta, \quad (3)$$

$$Q_\varphi = \tau - F_f R = \tau - \mu(M+m)gR \cdot \text{sgn}(\dot{\varphi}), \quad (4)$$

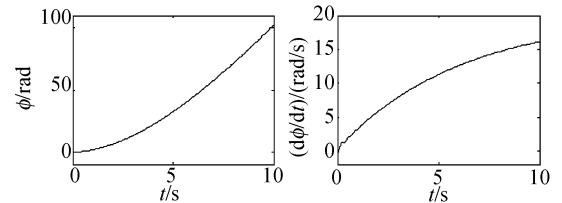
将式(1)~(4)代入基于能量耗散形式下的拉格朗日方程(5),就可以得到描述球形机器人系统的二元二阶方程,将其转化为矩阵的形式如式(6):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \psi_q}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots), \quad (5)$$

始终为正值,也就是  $\text{sgn}(\dot{\varphi}) \equiv 1$ 。从图 4(a)描述的单摆摆角的变化可以看出,在不加控制器的情况



(a)单摆摆角角度变化 (b)单摆摆角角速度变化  
(a)Trend of  $\theta$  (b)Variable trend of  $d\theta/dt$



(c)球体滚过角度变化 (d)球体滚动角速度变化  
(c)Variable trend of  $\phi$  (d)Variable trend of  $d\phi/dt$

图 4 球形机器人各状态变量变化曲线

Fig. 4 State variable curves of spherical robot

况下,单摆摆角出现了振荡后逐渐趋于稳态值,整个过程中摆角始终小于  $\pi/9$ ,根据一次线性近似理论,取  $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ 。综上,可以得到动力学方程(6)的线性化形式:

$$\begin{bmatrix} I_m & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & -\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \end{bmatrix}, \quad (7)$$

### 2.4 仿射变换

方程(7)是一个带有常数项的仿射系统。选

取摆角  $\theta$  和输入力矩  $\tau$  进行仿射变换,将系统转化为没有常数项的线性系统。取  $\theta_1 = \theta - k_1, \tau_1 =$

$\tau - k_2$ , 代入式(7)后求得  $k_1 = d, k_2 = d/(2c)$ 。变换后系统的方程如式(8)所示:

$$\begin{bmatrix} I_m & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & -\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

在物理意义上理解引入的两个常数:  $k_1$  是一个关于摆角的临界值, 当摆角超过这个值的时候, 整个球体便开始滚动;  $k_2$  是引入到输入力矩中的常数, 能够平衡掉地面的滚动摩擦阻的影响。经过变换后, 在新定义的输入力矩  $\tau_1$  的作用下, 整个系统在新的平衡点  $x_0' = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  处, 呈线性关系。

为了应用线性理论设计控制器, 球形机器人的控制可以分为以下两步来进行:

(1) 当  $0 \leq \theta < \theta_1$  时, 电机的力矩以  $mgL < \tau < d$  大小输出。在此过程中要保持摆速低速平稳, 尽量使摆角驱动至  $\theta_1$  位置时, 摆角角速度  $\dot{\theta} \approx 0$ 。此时球体处于将滚未滚的状态。

(2) 当  $\theta \geq \theta_1$ , 机器人动力学模型完成了仿射变换, 可以在新的平衡点  $x_0'$  处应用线性系统理论进行控制系统设计。

### 3 控制器设计原理

#### 3.1 状态观测器

如果对系统进行状态反馈, 则系统的状态  $x$  必须是可观测的, 当状态不能观测时, 则应设计状态观测器来估计状态<sup>[5-7]</sup>。

对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

若系统完全能观测, 则可构造如图 5 所示的状态观测器部分。假定系统所要求的  $n$  个观测器的极点为  $\lambda_1, \lambda_2, L, \lambda_n$ , 则可以求出期望的状态观测器的特征方程为:

$$f^*(s) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + L + a^n$$

这时, 可以求得反馈矩阵  $L$  为:

$$L = f^*(A) V_0^{-1} [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T, \quad (9)$$

式中

$$V_0 = [C \ CA \ \cdots \ CA^{n-1}]^T$$

观测器的状态方程为:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \quad (10)$$

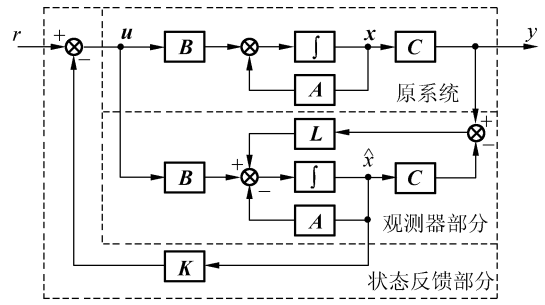


图 5 带状态观测器的反馈系统

Fig. 5 State feedback system based on state observer

与状态反馈极点配置的设计类似, 只要调整反馈矩阵  $L$ , 观测器的极点就可以任意配置达到要求的性能, 从而使  $\hat{x}$  能快速的逼近  $x$ 。

#### 3.2 带观测器的状态反馈系统

状态观测器解决了受控系统的状态重构问题, 为那些状态变量不能直接观测得到的系统实现状态反馈创造了条件。带状态观测器的状态反馈系统由三部分组成, 即原系统、观测器和控制器。其构建结构如图 5 所示。

设系统是能控能观测的, 则状态反馈控制律为:

$$u = r - K\hat{x}$$

结合状态观测器方程(10), 可以得到状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Br \\ \dot{\hat{x}} = LCx + (A - LC - BK)\hat{x} + Br \\ y = Cx \end{cases} \quad (11)$$

只要系统能控能观  $\Sigma_0(A, B, C)$ , 根据分离特性, 系统的状态反馈矩阵  $K$  和观测器反馈矩阵  $L$  可以分别根据各自的要求, 独立进行配置。

### 4 球形机器人控制系统设计

#### 4.1 控制系统方程建立

本文设计控制器的目的是要使球体内部出现一个稳定平台, 并且要求机器人行走速度趋于稳定。设想单摆摆角  $\theta$  保持定值时, 与单摆刚性固联的构件便可作为放置视觉传感器的稳定平台; 本文研究的是机器人在匀速运动状态下对前方目标的观测, 并不要求对球体进行位置控制, 当球体受纯滚动约束, 机器人球心的移动速度  $v_c = R(\dot{\varphi} - \dot{\theta})$ , 当  $\dot{\theta} \rightarrow 0$  时,  $v_c \rightarrow R\dot{\varphi}$ , 也就是说对球心的平移

速度的控制就可以通过间接控制滚动的角速度  $\dot{\varphi}$  来实现。球体的滚动角度  $\varphi$  是一个循环坐标,在这种特定的应用情况下,并没有参与系统的设计过程,忽略掉它的影响,可以只采用三个状态变量  $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T$  来对整个系统进行控制器的设计<sup>[8,9]</sup>。

对于单摆偏离与垂直方向的摆角  $\theta_1$ ,可以通过传感器直接进行实时测量。此摆角信息通过我们所选取的蓝牙 JINGOU-1 装置传输给上位机,由上位机上对数据进行差分处理后,就可以得到单摆摆动的角速度。为此选取可量测的,同时与控制机器人的目的密切相关的  $y = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T$  作为系统的输出,最终可以列写机器人状态空间形式的方程如(12):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\tau_1 \\ y = Cx \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$x = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\varphi}]^T; y = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T; H = aI_m - b^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2ac}{H} & -\frac{\xi(a+b)}{H} & \frac{\xi(a+b)}{H} \\ \frac{2bc}{H} & \frac{\xi(b+I_m)}{H} & -\frac{\xi(b+I_m)}{H} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a-b}{H} & \frac{I_m-b}{H} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4.2 基于观测器的反馈控制器设计

整个系统所能够直接观测到的信息也就是系统的输出:  $y = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T$ , 状态变量  $\dot{\varphi}$  是不可观测的,为此构建观测器来实时观测系统的全维状态变量。基于状态观测器,设计状态反馈控制器,实现对系统极点的任意配置,从而使机器人具有所需要的性能指标。假设机器人在执行探测任务时,要求由初态进入观测状态的时间控制在 1 s 之内,即系统状态变量的调整时间  $t_s \leq 1$  s,单摆摆角、角速度和球体滚动速度的超调量分别不超过 0.1 rad、1 rad/s 和 0.1 rad/s。

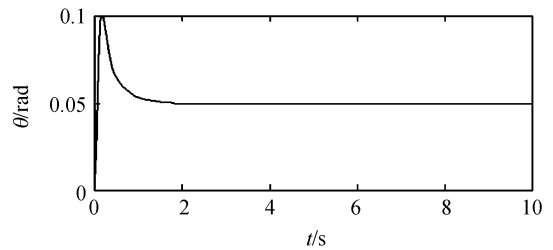
由于  $\text{rank}([B \ BA \ B^2A]) = 3$ ,  $\text{rank}([C \ CA \ C^2A]^T) = 3$ , 所以系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  是能控能观的。针对建立的机器人的线性系统方程(12),利用公式(9)的算法,进行观测器的状态反馈矩阵的求解。如果假设想要配置的极点为:  $P_L = [-5 \ -5 \ -8]^T$ , 则求得的反馈矩阵  $L$  为:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -283.5745 & 10.0457 \\ 40.32 & 20.6663 \end{bmatrix}$$

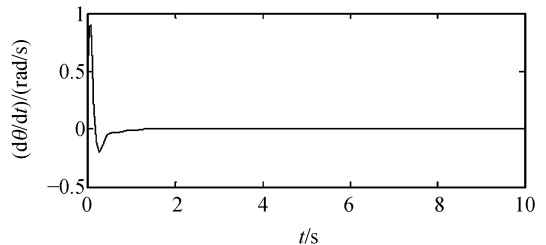
在得到了系统的全维状态信息后,就可以构建系统的全状态反馈控制器。假设想要配置的极点位置为  $P_K = [-5 \ -5 \ -8]^T$ , 根据式(11)中的设计思想,利用 Matlab 中的极点配置函数 Place(), 求得系统反馈增益矩阵为:

$$K = \text{diag}(0.8349 \ 0.7892 \ 1.4297)$$

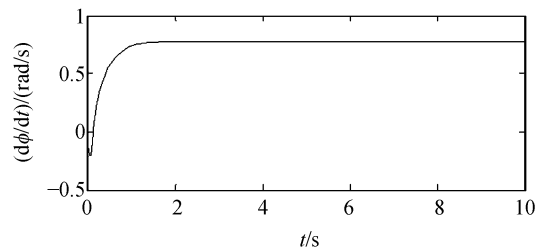
尽管在设计控制系统时采用的是非线性模型(12),但是在验证所设计的控制器时,采用的则是更能真实反映系统的非线性模型(6)。应用所设计的状态反馈控制器,得到系统的状态变量在电机输入力矩为 1 时的输出变化曲线如图 6 所示。



(a)单摆摆角角度变化  
(a) Variable trend of  $\theta$



(b)单摆摆角角速度变化  
(b) Variable trend of  $d\theta/dt$



(c)球体滚动角速度变化  
(c) Variable trend of  $d\phi/dt$

图 6 加入控制器后状态变量变化曲线

Fig. 6 State variable curves based on controller

由仿真数据可以得到闭环下球形机器人各状态变量的性能指标如表1所示。各状态变量趋于稳定的调整时间和最大超调量均在所要控制的范围以内,达到了系统要求的性能指标,这说明了所设计控制器的有效性。

在此设计实例中,应该注意到仿射变换时所引入的常量  $k_1, k_2$  分别为 0.074 5 rad, 0.411 6 N,也就是说单摆摆角和电机输出转矩的实际值应该是  $\theta(t) = \theta_1(t) + k_1$  和  $\tau = \tau_1 + k_2$ 。

表1 球形机器人各状态变量性能指标

Tab.1 Performance of state variables

状态变量	稳态值 $x(\infty)$	调整时间 $t_p$	最大超调量 $M_p$
$\theta(\text{rad})$	0.498	1.7123	0.0495
$\dot{\theta}(\text{rad/s})$	0	1.8667	0.8917
$\dot{\varphi}(\text{rad/s})$	0.7777	1.8432	0

## 参考文献:

- [1] 肖爱平. 一种新颖的球形行走机器人的研究[D]. 北京邮电大学博士学位论文, 2005.  
XIAO A P. *Research for a spherical robot* [D]. Graduate Beijing University of Posts and Telecommunications, 2005. (in Chinese)
- [2] BICCHI A, BALLUCHI A, PRATTICCHIZZO D. Introducing the "Sphericle": an experimental testbed for research and teaching in nonholonomy[C]. *Proceeding of IEEE on Robotics and Automation, New Mexico*, 1997, 3: 2620-2625.
- [3] JAVADI A H, MOJABI A P. Introducing August: A novel strategy for an omnidirectional spherical rolling robot [C]. *Proceeding of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Washington D. C.*, 2002: 3527-3533.
- [4] ABBOTT M S. *Kinematics, dynamics and control of single-axle, two-wheel vehicles (biplanar bicycles)* [M]. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University Press, 2000.
- [5] 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004.  
DUAN G R. *Linear system theory* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2004. (in Chinese)
- [6] 节德刚, 刘延杰, 孙立宁, 等. 一种宏微双重驱动精密定位机构的建模与控制[J]. *光学精密工程*, 2005, 13(2): 171-178.  
JIE D G, LIU Y J, SUN L N, et al.. Modeling and control of a macro-micro dual-drive ultra-precision positioning mechanism[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2005, 13(2): 171-178. (in Chinese)
- [7] 李国勇, 谢克明. 控制系统数字仿真与CAD[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.  
LI G Y, XIE K M. *Digital simulation and CAD of control system* [M]. Beijing: Electric Engineering Press, 2003.
- [8] 金振林, 李研彪. 3-P-2SS球平台机器人的运动传递性分析[J]. *光学精密工程*, 2006, 14(4): 658-661.  
JIN ZH L, LI Y B. Kinematic transmission property of a novel 3-P-2SS spherical platform manipulator[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(4): 658-661. (in Chinese)
- [9] 楚中毅, 崔晶, 孙立宁, 等. 双重驱动2-DOF平面并联机器人系统的研究[J]. *光学精密工程*, 2006, 14(3): 456-461.  
CHU ZH Y, CUI J, SUN L N, et al.. Research of a novel dual-driven 2-DOF planar parallel robot[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(3): 456-461. (in Chinese)

作者简介: 岳明(1975-), 男, 黑龙江集贤人, 哈尔滨工业大学在读博士, 主要从事球形机器人、月球车动力学建模及控制等方面的研究。E-mail: yueminghit@163.com

## 5 结 论

(1) 利用基于能量耗散形式下的拉格朗日方程, 建立了完全描述球形机器人的动力学模型, 指出这是一个非线性仿射系统;

(2) 根据机器人的实际工作情况及理论分析结果, 对动力学进行线性化和仿射变换, 将原动力学模型转化为标准的状态空间形式;

(3) 针对简化后的线性模型进行控制系统的设计, 考虑到传感器所能测出的实际量测数据, 构建状态观测器来实时观测机器人的全维状态变量。根据分离特性可以分别设计状态反馈矩阵和观测器反馈矩阵。